

**TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN**  
**Faculteit Wiskunde en Informatica**  
**Tentamen Algebra en Discrete Wiskunde, 2WF50,**  
**Woensdag 16 april 2014, 09:00 – 12:00**

Name :

Student number :

| Exercise | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | total |
|----------|---|---|---|---|---|---|-------|
| points   |   |   |   |   |   |   |       |

**Notes:** This exam consists of 6 exercises. You can reach 100 points. The mark for the exam is computed by dividing the total number of points by 10.

Make sure to justify your answers in detail. It is not sufficient to state the correct result without the explanation.

All exercises are stated in Dutch and in English.

**Attentie:** Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven. U kunt maximaal 100 punten behalen. Het cijfer voor het tentamen wordt bepaald door het aantal behaalde punten door 10 te delen.

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Motiveer uw antwoorden, tenzij anders vermeld.

Alle opgaven worden in het nederlands en in het engels gepresenteerd.



1. Let  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  denote the field of complex numbers with regular addition and multiplication. Let the sets  $M_1$  and  $M_2$  be defined as follows:

Laat  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  het lichaam van de complexe getallen met de gebruikelijke optelling en vermenigvuldiging zijn. Laat de verzamelingen  $M_1$  en  $M_2$  als volgt gedefinieerd zijn:

$$M_1 = \{a + b\sqrt{-4} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}, \quad M_2 = \{a + b\sqrt{1/2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}.$$

- (a) State the definition of a ring.  
Geef de definitie van een ring. 8 P
- (b) Study whether  $(M_1, \cdot)$  is a semigroup.  
Ga na of  $(M_1, \cdot)$  een halfgroep is. 4 P
- (c) Study whether  $(M_2, \cdot)$  is a semigroup.  
Ga na of  $(M_2, \cdot)$  een halfgroep is. 4 P
- (d) Is  $(M_1, +, \cdot)$  a subring of  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ? Why?  
Is  $(M_1, +, \cdot)$  een deelring van  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ? Waarom? 8 P
- (e) Is  $(M_2, +, \cdot)$  a subring of  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ? Why?  
Is  $(M_2, +, \cdot)$  een deelring van  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ? Waarom? 2 P
2. Let  $(M, \cdot)$  be the group of invertible  $2 \times 2$  matrices over  $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ , where  $\cdot$  is the usual matrix multiplication. We use  $\{0, 1, 2, 3, \dots, 23\}$  as representatives of the residue classes modulo 24. Let  $N = \{m \in M \mid ad - bc \equiv 1 \pmod{6}\}$ .  
Laat  $(M, \cdot)$  de groep van inverteerbare  $2 \times 2$  matrices met coëfficiënten in  $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$  zijn met  $\cdot$  de matrixvermenigvuldiging. Wij gebruiken  $\{0, 1, 2, 3, \dots, 23\}$  als representanten van de restklassen modulo 24. Laat  $N = \{m \in M \mid ad - bc \equiv 1 \pmod{6}\}$  zijn.

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, ad - bc \in (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Show that  $(N, \cdot)$  is a subgroup of  $(M, \cdot)$ .  
Toon aan dat  $(N, \cdot)$  een ondergroep van  $(M, \cdot)$  is. 6 P
- (b) State all left cosets of  $N$  in  $M$ .  
Bepaal alle linkernevenklassen van  $N$  in  $M$ . 6 P
- (c) Is  $\{m \in M \mid ad - bc \equiv 1 \pmod{8}\}$  a subgroup of  $M$ ?  
Is  $\{m \in M \mid ad - bc \equiv 1 \pmod{8}\}$  een ondergroep van  $M$ . 3 P
3. Consider the ring  $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ .  
Beschouw de ring  $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ .
- (a) How many elements does  $R$  have?  
Hoeveel elementen heeft  $R$ ? 1 P

- (b) Compute the order of  $R^\times$ .  
Bereken de orde van  $R^\times$ . 3 P
- (c) Compute the (multiplicative) order of  $(3, 3, 3) \in R^\times$ .  
Bereken de (multiplicatieve) orde van  $(3, 3, 3) \in R^\times$ . 4 P
- (d) Does there exist an integer  $m$  such that  $R \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ? If so, compute it, explain how to compute the ring homomorphism and the inverse of the ring homomorphism, and compute the image of  $(2, 3, 4)$ . If not, why not?  
Bestaat er een natuurlijk getal  $m$  met  $R \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ? Zo ja, bereken  $m$ , verklaar hoe het ringhomomorfisme en de inverse van het ringhomomorfisme berekend kunnen worden en bereken het beeld van  $(2, 3, 4)$ . Zo nee, waarom niet? 14 P
- (e) Find two elements  $a, b \in R$  so that  $a \cdot b = (0, 0, 0)$  but  $a, b \neq (0, 0, 0)$ .  
Bepaal twee elementen  $a, b \in R$  zodat  $a \cdot b = (0, 0, 0)$  maar  $a, b \neq (0, 0, 0)$ . 3 P
- (f) Compute the number of elements  $a \in R$  with  $a \neq (0, 0, 0)$  for which there exists a  $b \neq (0, 0, 0)$  such that  $a \cdot b = (0, 0, 0)$ . How many such elements exist in  $R^\times$ ?  
Bereken het aantal elementen  $a \in R$  met  $a \neq (0, 0, 0)$  waarvoor er een  $b \neq (0, 0, 0)$  bestaat met  $a \cdot b = (0, 0, 0)$ . Hoeveel van zulke elementen bestaan er in  $R^\times$ ? 8 P
4. State the definitions of an ideal, of a prime ideal, and of a maximal ideal.  
Geef de definities van een ideaal, van een priem ideaal, en van een maximaal ideaal. 6 P
5. Prove or give a counterexample:  
Bewijs of geef een tegenvoorbeeld:
- (a) A subring of a domain is a domain.  
Een deelring van een domein is een domein. 4 P
- (b) A subring of a field is a field.  
Een deelring van een lichaam is een lichaam. 4 P
6. Let  $G$  be a group and let  $H$  be a subgroup of  $G$ .  
Laat  $G$  een groep en  $H$  een ondergroep van  $G$  zijn.
- (a) State the definition of a normal subgroup.  
Geef de definitie van een normale ondergroep. 2 P
- (b) Show that if  $H$  has index 2 in  $G$  then  $H$  is normal in  $G$ .  
Toon aan dat  $H$  is normal in  $G$  als  $H$  index 2 in  $G$  heeft. 4 P
- (c) Prove or give a counterexample that  $H$  is normal in  $G$  if it has index 3 in  $G$ .  
**Hint:** Remember the two examples of non-commutative groups we used.  
Bewijs of geef een tegenvoorbeeld:  $H$  is normal in  $G$  als  $H$  index 3 in  $G$  heeft.  
**Hint:** Denk aan de twee typische non-commutatieve groepen die wij in het college gebruikt hebben. 6 P